

# SOBRE ALGUNOS PROBLEMAS REALES EN VISION POR ORDENADOR QUE CONDUCEN A SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICOS

Luis Alvarez y Javier Sánchez  
Departamento de Informática y Sistemas  
Universidad de Las Palmas de G.C.  
Campus Universitario de Tafira  
35017, Las Palmas  
Email: {lalvarez/jsanchez}@dis.ulpgc.es  
WebPage: <http://serdis.dis.ulpgc.es/~lalvarez/>

## Abstract

In this paper, we present some real problems which appear in computer vision which yields to nonlinear system of algebraic equations. We study the problem of camera calibration. Roughly speaking, camera calibration consists in looking at the camera position in the  $3 - D$  world using as information the projection of a  $3 - D$  scene in a  $2 - D$  plane (the photogram). The problem is quite different when we use a single view or several views (stereo vision) of the  $3 - D$  scene. We will show in this paper how these problems yields to nonlinear algebraic system of equations.

## Introducción

En esta comunicación, vamos a estudiar el problema de la calibración de imágenes, haciendo especial énfasis en los aspectos geométricos y algebraicos. El objetivo de este trabajo es presentar algunos problemas que aparecen en la teoría, y que dan lugar al estudio de sistemas de ecuaciones algebraicos no-lineales. Consideramos EACA-99, un congreso de álgebra computacional y aplicaciones, un marco idóneo para presentar estos problemas, y estimular una discusión sobre ellos.

La mayor parte de los resultados que se van a presentar, se encuentran en el excelente libro de Olivier Faugeras [3]. Presentaremos el problema de la calibración cuando se utiliza una sólo cámara y cuando se utilizan dos cámaras, como veremos, la forma de abordar el problema es bastante distinta, y en ámbos casos, en ciertas situaciones, llegamos a sistemas de ecuaciones algebraicos.

El modelo que vamos adoptar para estudiar la calibración de cámaras es el denominado "pinhole model" que asume un modelo proyectivo simple para el funcionamiento de la cámara. Es decir, la cámara viene representada por un plano  $\mathcal{R}$  en  $3 - D$  y un foco

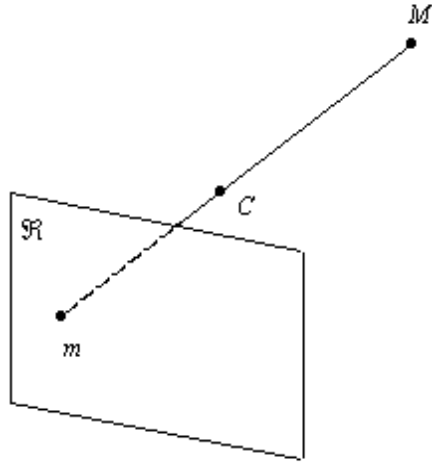


Figure 1: Proyección de un punto 3-D.

$C = (C_x, C_y, C_z)$ . La proyección de un punto  $M = (x, y, z)$  de la escena 3-D en la cámara viene dada por la intersección de la recta  $\overline{MC}$  con el plano  $\mathcal{R}$ , (véase figura 1).

## 1 Calibración de Cámaras utilizando una sola vista.

Calibrar una cámara significa encontrar los parámetros que determinan la proyección de la escena 3-D en el plano que determina la cámara. Hay dos tipos fundamentales de parámetros. Los parámetros intrínsecos y los parámetros extrínsecos. Una imagen captada por una cámara digital viene dada por una matriz de valores  $I(i, j)$  (niveles de gris).  $I(i, j)$  representa la intensidad de luz recibida por el pixel  $(i, j)$  de la cámara. Los pixels representan las pequeñas celdas (o captores) en los que está dividido el negativo de la cámara. Los parámetros intrínsecos de la cámara son la distancia focal  $f$ , el tamaño del pixel  $(p_x, p_y)$  y la posición en la cámara  $(c_x, c_y)$  de la intersección de la recta perpendicular al plano de la cámara que pasa por el foco con la propia cámara. Si por ejemplo, el negativo de la cámara está centrado respecto a la posición del foco, entonces

$$c_x = \frac{\text{Número de pixels horizontales}}{2}$$

$$c_y = \frac{\text{Número de pixels verticales}}{2}$$

a nivel proyectivo los parámetros  $f$  y  $(p_x, p_y)$  están relacionados entre sí, es decir, si tomamos una constante  $k$ , la proyección generada por una cámara de parámetros  $f$  y  $(p_x, p_y)$  es la misma que la generada por los parámetros  $kf$  y  $(kp_x, kp_y)$ . Por tanto, en lugar de los parámetros  $f$  y  $(p_x, p_y)$  se utilizan los parámetros  $\alpha_x = p_x/f$  y  $\alpha_y = p_y/f$ . Concluyendo, una cámara tiene 4 parámetros intrínsecos:  $\alpha_x, \alpha_y, c_x, c_y$ . Como su nombre indica, los parámetros

intrínsecos no dependen de la posición  $3 - D$  que ocupa la cámara en el universo  $3 - D$ . En muchas situaciones estos parámetros se pueden conocer "a priori" teniendo en cuenta las características técnicas de la cámara.

Los parámetros extrínsecos de la cámara hacen referencia a la posición  $3 - D$  de la cámara con respecto a la escena que estamos contemplando. Para ello se fija un sistema de referencia  $3 - D$  en la escena, y los parámetros extrínsecos de la cámara vienen dados por un vector de traslación  $t = (t_x, t_y, t_z)$  y una matriz de rotación  $R = (r_{ij})$  con respecto a dicho sistema de referencia. Dado que una rotación depende de 3 parámetros (el vector unitario sobre el que se rota y el ángulo de rotación), el número total de parámetros extrínsecos es 6.

Para establecer la manera en que los parámetros de la cámara determinan la proyección de un punto  $M$  ( $3 - D$ ) que se proyecta en un punto  $m$  ( $2 - D$ ) resulta más conveniente por diversos motivos trabajar con coordenadas proyectivas. El resultado fundamental se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.** (Faugeras [3]) *Sea un punto  $\widetilde{M} = (M_1, M_2, M_3, M_4) \in \mathcal{P}^3$ , entonces la proyección  $\widetilde{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{P}^2$  de  $\widetilde{M}$  en la cámara que tiene por parámetros intrínsecos  $\alpha_x, \alpha_y, c_x, c_y$  y por parámetros extrínsecos  $t$  y  $R$ , viene dada por la siguiente expresión:*

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x \mathbf{r}_1 + c_x \mathbf{r}_3 & \alpha_x t_x + c_x t_z \\ \alpha_y \mathbf{r}_2 + c_y \mathbf{r}_3 & \alpha_y t_y + c_y t_z \\ \mathbf{r}_3 & t_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r}_i$  presenta el vector columna  $i - \text{ésimo}$  de la matriz de rotación  $R$ . A la matriz  $4 \times 3$  que determina la proyección se le denomina  $\widetilde{P}$ , es decir tenemos  $\widetilde{m} = \widetilde{P}\widetilde{M}$ . Nótese que como aplicación lineal proyectiva, la matriz  $\widetilde{P}$  está definida módulo la multiplicación por una constante.

Para calibrar la cámara supondremos que existe un conjunto de puntos  $\widetilde{M}_i$  de los cuales conocemos sus proyecciones en la cámara  $\widetilde{m}_i$ , el problema fundamental de la calibración consiste en encontrar una matriz  $P$  de  $4 \times 3$  elementos que verifique

$$\widetilde{m}_i = \widetilde{P}\widetilde{M}_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2)$$

donde  $N$  es el número de puntos. En la práctica, para obtener el conjunto de puntos  $(\widetilde{M}_i, \widetilde{m}_i)$  se utiliza, lo que se denomina, un calibrador. Un calibrador es un objeto como el representado en la imagen de la figura 2, del cual conocemos con exactitud las coordenadas  $3 - D$  de algunos puntos. Por ejemplo, en este caso, conocemos (porque lo hemos medido físicamente), las coordenadas de los puntos que corresponden a las esquinas de los rectángulos negros. Por tanto los puntos  $\widetilde{M}_i$  se elegirán entre las esquinas de los rectángulos, y los puntos  $\widetilde{m}_i$  serán las coordenadas de dicho punto en la imagen.

Nótese que la matriz  $\widetilde{P}$  posee 12 elementos, y que para cada par  $(\widetilde{M}_i, \widetilde{m}_i)$  la ecuación (2) determina, una vez eliminado el parámetro proyectivo, dos ecuaciones que involucran a

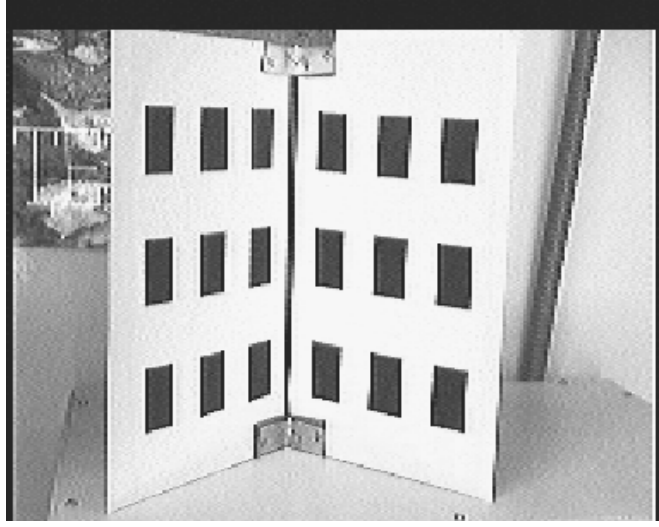


Figure 2: Imagen de un calibrador.

los elementos de  $\tilde{P}$ , que vienen dadas por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 p_{1i}M_i + p_{14} - m_1 \left( \sum_{i=1}^3 p_{3i}M_i + p_{34} \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 p_{2i}M_i + p_{24} - m_2 \left( \sum_{i=1}^3 p_{3i}M_i + p_{34} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Cuando  $N$  (el número de pares  $(\tilde{M}_i, \tilde{m}_i)$  conocidos) es mayor o igual que 6, y dichos puntos están en posición general (es decir no son ciertas configuraciones geométricas especiales de puntos) entonces es posible recuperar la matriz  $\tilde{P}$  a partir de las relaciones (2). La técnica para calcular  $\tilde{P}$  es muy sencilla. Si denotamos  $p = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{34})$  el vector de 12 elementos dados por las filas de matriz  $\tilde{P}$ , entonces las relaciones (3) pueden escribirse como  $Ap = 0$ , donde  $A$  es una matriz de  $2N \times 12$ . Como  $p$  está definido módulo una constante proyectiva, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\|p\| = 1$ . El vector  $p$  puede interpretarse como el vector donde alcanza el mínimo la energía  $E(p)$  dada por:

$$E(p) = \|Ap\|^2 = p^T A^T A p$$

con la restricción  $\|p\| = 1$ . Un sencillo cálculo nos lleva a que el mínimo de  $E(p)$  corresponde al autovector del autovalor más pequeño de la matriz  $A^T A$ . Por otro lado, también por técnicas standard una vez conocida la matriz  $\tilde{P}$  es posible calcular a partir de ella las configuraciones posibles de parámetros intrínsecos y extrínsecos. Cuando  $N$  es inferior a 6, por ejemplo  $N = 5$ , estas técnicas standard no son operativas, y no dan ningún resultado debido a que tendríamos 10 ecuaciones lineales y 12 incógnitas (los elementos de  $\tilde{P}$ ). En

este caso, lo que sucede es que el espacio de autovectores de la matriz  $A^T A$  asociado al autovalor mas pequeño tiene dimensión mayor que 1, y por tanto no podemos determinar  $p$  de forma única. Sin embargo, formalmente  $N = 5$  debería ser suficiente para obtener algún tipo de resultado porque la matriz  $\tilde{P}$  depende de 4 parámetros intrínsecos y 6 parámetros extrínsecos, es decir un total de 10 parámetros, por tanto, 10 ecuaciones serían en principio suficientes para encontrar posibles valores de los parámetros intrínsecos y extrínsecos

Veamos como cuando  $N = 5$ , podemos llegar a un sistema algebraico de 11 ecuaciones y 11 incógnitas para determinar los parámetros intrínsecos y extrínsecos. Para ello, vamos a expresar la matriz de rotation  $R$  algebraicamente. Es bien conocido que una matriz de rotación puede expresarse como

$$R = \begin{pmatrix} s^2 + l^2 - m^2 - n^2 & 2(lm - sn) & 2(nl + sm) \\ 2(lm + sn) & s^2 - l^2 + m^2 - n^2 & 2(mn - sl) \\ 2(nl - sm) & 2(mn + sl) & s^2 - l^2 - m^2 + n^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

con la condición adicional de que  $s^2 + l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Si sustituimos esta ecuación en la expresión de  $\tilde{P}$  dada en (1) obtenemos  $\tilde{P}$  expresada algebraicamente en términos de  $s, l, m, n, t_x, t_y, t_z, c_x, c_y, \alpha_x$  y  $\alpha_y$ . (11 incógnitas). Al sustituir los valores de  $P$  en las ecuaciones (3) obtenemos 2 ecuaciones algebraicas. Si  $N = 5$  tenemos 10 ecuaciones algebraicas. La undécima ecuación viene dada por  $s^2 + l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Lo que determina un sistema algebraico de ecuaciones de 11 ecuaciones y 11 incógnitas.

Otra manera de formular el sistema de ecuaciones es el siguiente: Para que una matriz  $\tilde{P}$  determine una proyección correctamente (es decir  $\tilde{P}$  pueda expresarse como en (1) a partir de los parámetros intrínsecos y extrínsecos) tiene que cumplir 2 condiciones (véase [3])

$$p_{31}^2 + p_{32}^2 + p_{33}^2 = 1$$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \left( \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{pmatrix} \right) \right) = 0$$

donde  $\wedge$  indica el producto vectorial y  $\cdot$  el producto escalar. Por tanto, en el caso  $N = 5$ , si añadimos estas 2 ecuaciones a las 10 ecuaciones lineales que determinan (3) obtenemos un sistema algebraico de 12 ecuaciones y 12 incógnitas.

## 2 Calibración de Cámaras utilizando dos vistas.

En el caso de tener 2 vistas sobre una escena, como se muestra en la figura 3, no es necesario utilizar un calibrador para obtener información  $3 - D$  sobre la escena, el par de imágenes estéreo es suficiente para recuperar la geometría  $3 - D$ . Supondremos en este caso que conocemos los parámetros intrínsecos de la cámara, de hecho dichos parámetros pueden normalizarse de tal forma que  $c_x = c_y = 0$  y  $\alpha_x = \alpha_y = 1$ .

Vamos a centrar nuestro sistema de referencia  $3 - D$  en una de las imágenes. En este caso, entendemos por calibrar las cámaras, encontrar la rotación  $R$  y traslación  $t$  que existe



Figure 3: Ejemplo de un par de imágenes estéreo.

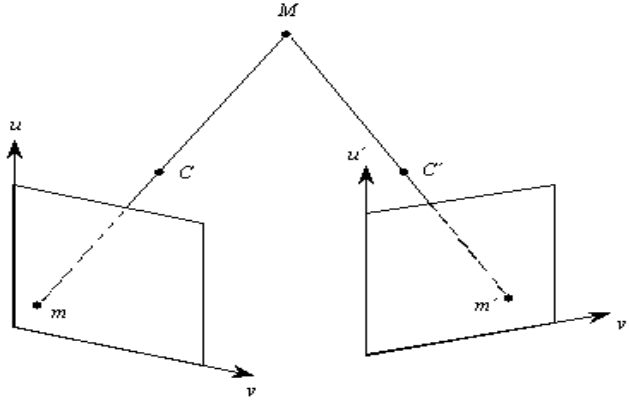


Figure 4: Proyección de un punto 3-D en dos planos.

entre las posiciones de las dos cámaras. La información de la que partimos es un conjunto de  $N$  pares de puntos  $m_i = (u_i, v_i)$ ,  $m'_i = (u'_i, v'_i)$  que representan la proyección del mismo punto  $(x_i, y_i, z_i)$  en las dos imágenes.

Nótese que para cualquier par de puntos  $m_i$  y  $m'_i$  las rectas  $\overline{Cm_i}$  y  $\overline{C'm'_i}$  están en el mismo plano, esto establece una condición, denominada condición de epipolaridad, que relaciona  $m_i$ ,  $m'_i$ ,  $t$  y  $R$ . Un cálculo directo nos lleva a que esta condición puede expresarse como:

$${}^T\tilde{m}'_i Q \tilde{m}_i = 0. \quad (5)$$

donde  ${}^T\tilde{m}'_i = (u'_i, v'_i, 1)$ ,  ${}^T\tilde{m}_i = (u_i, v_i, 1)$ , y  $Q$  viene dada por la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} (r_{13}t_y - r_{12}t_z) & (r_{11}t_z - r_{13}t_x) & (r_{12}t_x - r_{11}t_y) \\ (r_{23}t_y - r_{22}t_z) & (r_{21}t_z - r_{23}t_x) & (r_{22}t_x - r_{21}t_y) \\ (r_{33}t_y - r_{32}t_z) & (r_{31}t_z - r_{33}t_x) & (r_{32}t_x - r_{31}t_y) \end{pmatrix} \quad (6)$$

El método standard de calibración en este caso consiste en tomar  $N$  pares de puntos  $(m_i, m'_i)$  (con  $N \geq 8$ ), montar un sistema lineal de ecuaciones para encontrar los elementos de una matriz  $Q$  que verifique (5) para todos los pares de puntos  $(m_i, m'_i)$ . Para ello se utiliza el denominado algoritmo de 8 puntos introducido en [6]. Este algoritmo se basa, como en el problema anterior de una sola cámara, en el cálculo del mínimo de una energía que se resuelve calculando el autovector asociado al autovalor más pequeño de una cierta matriz. Una vez calculado  $Q$ , se calculan las posibles rotaciones  $R$ , y traslaciones  $t$  que cumplen la relación (6). Nótese que la relación (5) es homogénea en  $t$ , y por tanto  $Q$  sólo puede determinarse módulo un factor de escala. Normalmente se normaliza  $\|t\| = 1$ . Por tanto para recuperar de manera exacta la posición 3-D de los los puntos cuyas proyecciones son  $(m_i, m'_i)$  es necesario alguna información adicional (por ejemplo conocer la distancia exacta entre dos puntos concretos 3-D de la escena), si no poseemos alguna información adicional de este tipo, entonces la información 3-D que recuperamos es módulo un factor de escala. Es decir la forma de los objetos es reconocible, pero no su tamaño exacto.

Nótese que para cualquier matriz  $Q$  de  $3 \times 3$ , no existe una rotación  $R$  y traslación  $t$  tal que  $Q$  pueda expresarse como (6). El resultado fundamental en este sentido es el siguiente:

**Teorema 2.1.** (Faugeras [3]) *Dada una matriz  $Q$ , existe una rotación  $R$  y una traslación  $t$  tal que  $Q$  pueda expresarse como (6) si sólo si*

$$\begin{aligned} |Q| &= 0 \\ \frac{1}{2} (\text{traza}({}^T Q Q))^2 - \text{traza}({}^T Q Q)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que con respecto a los elementos de  $Q$ , la primera ecuación es un polinomio de grado 3, la segunda ecuación es un polinomio de grado 4. El número de parámetros libres necesarios para determinar la rotación y traslación es 5 : 3 para la rotación, y 2 para la traslación (teniendo en cuenta la condición  $\|t\| = 1$ ). Por tanto resulta razonable pensar que con 5 pares de puntos  $(m_i, m'_i)$  sería suficiente para determinar posibles valores para la rotación  $R$  y traslación  $t$ . Si  $N = 5$  (número de pares  $(m_i, m'_i)$ ) podemos plantear un sistema algebraico de 8 ecuaciones y 9 incógnitas dado por las ecuaciones lineales (5) para los 5 pares de puntos  $(m_i, m'_i)$  las dos ecuaciones dadas por el teorema anterior, y la ecuación adicional  $\sum_{i,j} q_{ij}^2 = 1$ . A pesar de que hay menos ecuaciones que incógnitas, el número de soluciones esperado del sistema es finito. En una consulta personal realizada al Profesor Faugeras sobre esta cuestión, éste nos indico que el sistema tiene un número finito de soluciones debido a que la segunda ecuación del teorema anterior determina implícitamente 2 condiciones sobre  $Q$ . Por ejemplo, una ecuación del tipo  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 + (xy - 1)^2 = 0$  es una única ecuación que determina 2 condiciones sobre las variables  $x, y, z$ .

Este problema también fue abordado en [4] donde se presenta un algoritmo de 5 puntos para calcular las posibles configuraciones de rotaciones y traslaciones. El algoritmo se basa en primer lugar en calcular los denominados epipolos (puntos de intercección entre la recta  $\overline{CC'}$  y los planos de las cámaras), y a partir de ahí recuperar las rotaciones y traslaciones posibles. En dicho artículo se demuestra que el número de configuraciones posibles es 10.

Otra formulación alternativa del problema es utilizar la descripción de una rotación, utilizando cuaterniones, dada por la expresión (4), sustituyendo dicha expresión en las ecuaciones (6) y (5) obtenemos la ecuación:

$$\begin{pmatrix} u'_i u_i \\ u'_i v_i \\ u'_i \\ v'_i u_i \\ v'_i v_i \\ v'_i \\ u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} t_y (2nl + 2sm) - t_z (2lm - 2sn) \\ t_z (s^2 + l^2 - m^2 - n^2) - t_x (2nl + 2sm) \\ t_x (2lm - 2sn) - t_y (s^2 + l^2 - m^2 - n^2) \\ t_y (2mn - 2sl) - t_z (s^2 - l^2 + m^2 - n^2) \\ t_z (2lm + 2sn) - t_x (2mn - 2sl) \\ t_x (s^2 - l^2 + m^2 - n^2) - t_y (2lm + 2sn) \\ t_y (s^2 - l^2 - m^2 + n^2) - t_z (2mn + 2sl) \\ t_z (2nl - 2sm) - t_x (s^2 - l^2 - m^2 + n^2) \\ t_x (2mn + 2sl) - t_y (2nl - 2sm) \end{pmatrix} = 0$$

Si  $N = 5$ , la expresión anterior determina 5 ecuaciones cuyas incógnitas son 7:  $s, l, m, n, t_x, t_y$  y  $t_z$ , estas 5 ecuaciones se completan con las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} s^2 + l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \\ t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 &= 1 \end{aligned}$$

construyendo así un sistema algebraico de 7 ecuaciones y 7 incógnitas. Este problema ha sido resuelto utilizando técnicas algebraicas por Emeris (véase [1] y [2]) simplificando el sistema de la siguiente forma: Se realiza un cambio de variable utilizando cuaterniones. Los cuaterniones son elementos del espacio  $\mathbb{R}^4$ , que se expresan como  $\dot{s} = (s_0, \mathbf{s})$  donde  $s_0$  es un número real, y  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ , y donde se ha definido una ley de composición interna de la siguiente forma:

$$(s_0, \mathbf{s}) \times (d_0, \mathbf{d}) = (s_0 d_0 - \mathbf{s} \mathbf{d}^T, s_0 \mathbf{d} + d_0 \mathbf{s} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{d})$$

donde  $\mathbf{s} \wedge \mathbf{d}$  define el producto vectorial usual en  $\mathbb{R}^3$ . El espacio  $\mathbb{R}^3$  se sumerge en en conjunto de los cuaterniones, como los elementos  $(s_0, \mathbf{s})$  tales que  $s_0 = 0$ . De manera similar a los números complejos, se define el conjugado de un cuaternión como  $\overline{(s_0, \mathbf{s})} = (s_0, -\mathbf{s})$ , cumpliéndose la propiedad  $\overline{(s_0, \mathbf{s})} \times (s_0, \mathbf{s}) = (s_0^2 + \|\mathbf{s}\|^2, \mathbf{0})$ . Volviendo a nuestro problema, vamos a denotar por  $\dot{q} = (s, l, m, n)$  el cuaternión que determina la matriz de rotación  $R$ , y por  $\dot{t} = (0, t_x, t_y, t_z)$  el cuaternión que determina el vector de traslación  $t$ . Vamos a sustituir ahora  $\dot{t}$ , por el cuaternion  $\dot{d}$  definido como  $\dot{d} = \dot{t} \times \dot{q}$ . De tal manera que ahora las nuevas incógnitas son  $\dot{d}$  y  $\dot{q}$ . Realizando ahora algunas manipulaciones algebraicas, y suponiendo que  $q_0 = d_0 = 1$  se obtiene que la relación de epipolaridad  ${}^T \tilde{m}'_i Q \tilde{m}_i = 0$ , en las nuevas incógnitas se escribe como

$$(\tilde{m}_i^T \mathbf{q}) (\tilde{m}_i^T \mathbf{d}) + \tilde{m}_i^T \tilde{m}_i + (\tilde{m}_i \wedge \mathbf{q})^T \tilde{m}'_i + (\tilde{m}_i \wedge \mathbf{q}) (\mathbf{d} \wedge \tilde{m}'_i) + \tilde{m}_i^T (\mathbf{d} \wedge \tilde{m}'_i) = 0$$

para  $i = 1, \dots, 5$ . La gran ventaja de estas ecuaciones es que son bilineales respecto a  $\tilde{m}_i$  y  $\tilde{m}'_i$ . Además a estas 5 ecuaciones tenemos que añadir una ecuación más que determina que



cuando recuperemos el cuaternión  $\hat{t}$ , éste verifique que  $t_0 = 0$ , ello determina la condición adicional

$$1 - \mathbf{dt}^T = 0$$

a partir de este sistema de ecuaciones, Emeris desarrolla un método puramente algebraico que determina de manera exacta el conjunto de soluciones posibles utilizando técnicas en el contexto de la teoría de variedades tóricas y la eliminación dispersa.

En el caso de tener 3 o más imágenes de una escena, también aparecen de forma natural condiciones de tipo algebraico determinadas por la geometría epipolar de las diferentes cámaras. Un estudio sobre estas condiciones ha sido desarrollado por Faugeras y Mourrain en [5].

Existen otros problemas interesantes en Robótica, como la manipulación de un brazo articulado de robot con 6 grados de libertad (véase [7]), que conducen de forma natural a la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicos. En este caso, el problema consiste en dada una posición determinada en el espacio, encontrar las posibles configuraciones de los elementos del brazo articulado del robot, para que el robot alcance dicha posición en el espacio. Es un problema que surge de forma natural en las cadenas de montaje de las industrias que utilizan robots articulados.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto PIB95-1225 del M.E.C. y por la acción integrada Hispano-Francesa HF98-0098.

Agradecemos al Comité Científico del EACA'99, por poner en nuestro conocimiento la existencia de los trabajos [1], [2], [7] y [5], que nosotros desconocíamos, y cuya inclusión ha supuesto una sensible mejora en la presentación de algunos de los resultados expuestos en este trabajo.

## References

- [1] I. Emiris "Sparse Elimination and Applications in Kinematics", *Ph.D. Thesis U.C. Berkeley*, diciembre 1994.
- [2] I. Emiris "A general Solver Based on Sparse Resultants: Numerical Issues & Kinematic Applications", *Informe Técnico N°3110, INRIA, 1997.*
- [3] O.Faugeras, "3-D computer vision. A geometric viewpoint," *MIT Press, 1993.*
- [4] O.Faugeras and S.Maybank "Motion from point matches: multiplicity of solutions," *International Journal of Computer Vision*, Vol. 4(3) pp 225-246, 1990.
- [5] O.Faugeras and B.Mourrain "On the geometry and algebra of the point and line correspondences between  $N$  images" *Informe Técnico N°2665, INRIA, 1995.*

- [6] H.C.Longuet-Higgins, "A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections," *Nature* , Vol. 293, 133, 1981.
- [7] D.Manocha and J.F.Canny, "Efficient Inverse Kinematics for general 6R Manipulations", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10-5, 1994, 648-657