

ESQUEMA VARIACIONAL PARA EL FILTRADO DE IMÁGENES MÉDICAS TENSORIALES

C.A. Castaño Moraga*, L. Alvarez León†, M.A. Rodríguez Florido*‡, J. Ruiz Alzola*§

*Centro de Tecnología Médica - Departamento de Señales y Comunicaciones

†Departamento de Informática y Sistemas

‡Departamento de Ingeniería Telemática

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

§Brigham and Women's Hospital, Harvard Medical School, Boston (MA)

e-mail: ccasmor@ctm.ulpgc.es, lalvarez@dis.ulpgc.es, jruiz@ctm.ulpgc.es

Abstract—Diffusion Tensor Magnetic Resonance Imaging (DT-MRI) has become an usual medical image modality for many clinical analysis. This technique provides a discrete noisy measure of the anisotropic water diffusion in tissues, which is coded as a second order symmetric positive-semidefinite tensor for each voxel. In this paper, we propose a filtering scheme to regularize these tensor fields. Our approach is based on variational methods combined with the computation of a local structure measure of this non-scalar data. Some examples with synthetic and DT-MRI data illustrate the performance of the method.

I. INTRODUCCIÓN

Desde su aparición a mediados de los años noventa hasta hoy, DT-MRI (*Diffusion Tensor Magnetic Resonance Imaging*) se ha convertido en una modalidad de imagen médica alternativa a la resonancia magnética convencional (MRI) y en una técnica cada día más utilizada para el análisis de patologías neurodegenerativas [5]: isquemia cerebral, esclerosis múltiple, leucoencefalopatía, Alzheimer, conectividad neuronal, etc.

Esta nueva modalidad de imagen médica realiza una medida de la difusión de las moléculas de agua en los tejidos al aplicar un gradiente de campo eléctrico [13]. Como la medida de la difusión es un tensor de segundo orden, para cada voxel se obtiene un tensor de segundo orden, simétrico y semidefinido positivo, que codifica la magnitud de la difusión efectiva en cada una de las direcciones del espacio.

Por ejemplo, en la materia blanca del cerebro, la difusión del agua es anisótropa a lo largo de las fibras que conectan los dos hemisferios del cerebro. La medida del tensor de difusión asociado al movimiento browniano de las moléculas de agua en este tejido permite describir su estructura [11], mientras que la resonancia magnética convencional no puede dar cuenta de ella.

El volumen de datos tensoriales obtenido tras el proceso de medida está formado por muestras discretas y ruidosas que miden la difusión promedio en cada voxel. De ahí la necesidad de regularizar este tipo de datos, planteando un problema típico de estimación de la señal.

En este artículo se propone una formulación variacional anisótropa [12] que regulariza el campo de datos de DT-MRI. Para dirigir el proceso de suavizado anisótropo utilizamos una generalización del tensor de estructura local [8] para este

tipo de datos. La resolución del modelo variacional se realiza mediante un método de elementos finitos [1], reduciendo el problema a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

El texto se ha organizado de la siguiente forma. En primer lugar se hace un repaso de los modelos variacionales, tanto en sus versiones isotropas como anisotropas, y se establece la equivalencia entre estos modelos y los basados en ecuaciones en derivadas parciales (EDP) [10]. A continuación, se detallan los fundamentos teóricos utilizados para el cálculo del tensor de estructura y se justifica su utilización. Finalmente, se muestran algunos resultados obtenidos tanto en imágenes sintéticas como en datos DT-MRI.

II. TEORÍA: FORMULACIONES VARIACIONALES

Esta sección presenta una introducción a los modelos variacionales y su equivalencia con las técnicas de EDP.

A. Formulaciones Isotropas

Los métodos variacionales constituyen una de las técnicas comúnmente utilizadas para el filtrado de campos de datos. Básicamente, estos métodos consisten en encontrar una versión filtrada $\hat{f}(\mathbf{x})$ del campo de datos $f(\mathbf{x})$, minimizando un funcional de energía, es decir, tratando de encontrar el campo de datos $\hat{f}(\mathbf{x})$ que minimiza la expresión:

$$\xi = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \|\nabla \hat{f}(\mathbf{x})\|^2 dx \quad (1)$$

donde el primer término considera el parecido entre la señal original y la versión filtrada, mientras que el segundo suaviza el resultado, eliminando las discontinuidades. En esta ecuación, λ es un parámetro que, en función de su valor, controla el grado de suavizado o de realce de las estructuras del campo de datos.

La minimización de este funcional satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{(f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}))}{\lambda} = \text{div}(\nabla \hat{f}(\mathbf{x})), \quad (2)$$

que es una ecuación en derivadas parciales (EDP) y que justifica la equivalencia entre ambas formulaciones

Ambos modelos, tanto los basados en EDP como los variacionales, presentan problemas como el desplazamiento de bordes y distorsión de la información local del campo de datos. Para resolverlos, se han propuesto distintas soluciones [7], [2], todas ellas igualmente isotropas, pero que distinguen entre regiones con diferente estructura a través de un término no lineal que depende del módulo del gradiente, como se muestra a continuación:

$$\xi = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2 dx + \lambda \int_{\Omega} g(\|\nabla \hat{f}(\mathbf{x})\|^2) dx \quad (3)$$

Mediante esta nueva formulación, se mejoran los resultados obtenidos con (1), pero siguen teniendo el problema de no preservar bien la señal en los bordes [8]. Esto conduce a la utilización de modelos anisótropos, que permiten filtrar a lo largo de la dirección de menos variación de la señal y no en la dirección perpendicular a ella.

B. Formulación Anisótropa

El comportamiento anisótropo de los modelos variacionales se puede modelar mediante un tensor $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ de orden dos, simétrico y semidefinido positivo [12] de la forma que se indica a continuación:

$$\xi = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}))^2 + \lambda \int_{\Omega} \|\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla \hat{f}(\mathbf{x})\|^2 \quad (4)$$

Cuando el tensor $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ es la matriz identidad, entonces el proceso es equivalente a las formulaciones isotropas de la sección anterior. La dificultad que presenta la resolución de la ecuación anterior es la estimación del tensor $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ a partir del campo de datos. En la siguiente sección se propone la utilización del tensor de estructura $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, inicialmente propuesto en [3], para estimar $\mathbf{D}(\mathbf{x})$.

III. EL TENSOR DE ESTRUCTURA LOCAL

La medida de la estructura local tiene un gran interés en el campo de procesamiento de imágenes, ya que permite diferenciar entre regiones con distintas características locales (p. ej. bordes, esquinas, zonas homogéneas, etc.). Esta información se puede describir mediante el tensor de estructura, que codifica la complejidad local tanto en la dirección de máxima variación de la señal como en las direcciones ortogonales.

Para el caso escalar, en [3] se propone un método para obtener el tensor de estructura $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ con independencia de la fase local del campo de datos, es decir, respondiendo de igual forma ante bordes o líneas [4]. Dicho descriptor, para el caso n -dimensional, se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} \|q_k\| \mathbf{M}^k, \quad (5)$$

donde $\|q_k\|$ son las coordenadas del tensor en la base tensorial $\{\mathbf{M}^k\}$.

Las coordenadas $\|q_k\|$ se obtienen como la norma de la respuesta a un banco de filtros en cuadratura esféricamente separables cuya función de transferencia es:

$$Q(\omega) = \begin{cases} e^{(\frac{-4}{B^2 \ln 2})(\ln^2(\frac{\|\omega\|}{\|\omega_0\|}))}, & \text{si } \hat{\omega}^T \hat{\mathbf{n}}_k > 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (6)$$

donde ω es el vector de frecuencias, B el ancho de banda del filtro y cada $\hat{\mathbf{n}}_k$ el vector unitario que determina la orientación de cada filtro en cuadratura. Para cubrir todo el espectro con el mínimo número de orientaciones, cada $\hat{\mathbf{n}}_k$ apunta a los vértices de un polígono regular (un hexágono en 2D o un icosaedro en 3D). A la vista de (6), estos filtros se pueden interpretar como funciones gaussianas orientadas en escala logarítmica, centradas en $\|\omega_0\|$ y con un ancho de banda B .

Los elementos de la base tensorial $\{\mathbf{M}^k\}$ representan los tensores asociados a las orientaciones de los filtros en cuadratura y se obtienen mediante su producto externo $\{\hat{\mathbf{n}}_k \hat{\mathbf{n}}_k^T\}$.

Para el caso de campos tensoriales de orden superior (vectoriales y tensoriales de mayor orden), en [9] se propone una generalización del tensor de estructura utilizando la representación (5), pero calculando las coordenadas mediante un nuevo método. La generalización consiste en utilizar la salida al banco de filtros sobre cada componente para estimar una norma-2, que en el caso de datos vectoriales, correspondería a una norma euclídea; en el de datos tensoriales de orden 2, con la norma de Frobenius. Esta norma-2 proporciona las coordenadas en la base tensorial $\{\mathbf{M}^k\}$.

Por ejemplo, en el caso de un campo vectorial 2D el tensor de estructura se calcula con la siguiente expresión:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} \underbrace{\sqrt{(\|q_{[k]1}\|^2 + \|q_{[k]2}\|^2)}}_{\text{norma de } \begin{pmatrix} \|q_{[k]1}\| \\ \|q_{[k]2}\| \end{pmatrix}} \mathbf{M}^k, \quad (7)$$

mientras que en el caso de un campo tensorial 2D de orden 2, el tensor de estructura se calcula a partir de:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} \underbrace{(\|q_{[k]11}\|^2 + \|q_{[k]12}\|^2 + \|q_{[k]21}\|^2 + \|q_{[k]22}\|^2)^{\frac{1}{2}}}_{\text{Norma de Frob. } \begin{pmatrix} \|q_{[k]11}\| & \|q_{[k]12}\| \\ \|q_{[k]21}\| & \|q_{[k]22}\| \end{pmatrix}} \mathbf{M}^k \quad (8)$$

En general, para un campo tensorial de orden arbitrario, el tensor de estructura local viene proporcionado por:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} \left(\sum_{xyz\dots n} \|q_{[k]xyz\dots n}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^k, \quad (9)$$

donde los subíndices $xyz\dots n$ están asociados a las componentes del campo tensorial.

Esta generalización es consistente con el hecho de que cada componente añade sólo su propia estructura local y la suma de las respuestas de los filtros sólo añaden información isotropa salvo en las zonas de alta estructura.

Un tensor de orden dos, simétrico y semidefinido positivo se puede representar mediante un elipsoide cuyos ejes vendrán determinados por los autovalores y autovectores del tensor. De este modo, un tensor de estructura $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ correspondiente a un borde está asociado a un elipsoide alargado cuya dirección principal apunta en la de máxima variación de la señal. Cuando el elipsoide asociado es redondeado, puede significar que hay dos o más direcciones de variación de la señal (p. ej. una esquina) o ninguna variación de la señal (p. ej. zona homogénea), dependiendo del valor de los autovalores.

Por otra parte, al tensor $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ le corresponde un elipsoide alargado en las zonas fronterizas apuntando en la dirección ortogonal a la de máxima variación de la señal. De este modo se evita mezclar información correspondiente a distintas regiones.

Dada esta correspondencia, en este trabajo se propone la utilización del inverso del tensor de estructura, $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$, como tensor $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ que controla el comportamiento anisótropo en (4). Al invertir el tensor de estructura, el eje menor del elipsoide asociado pasa a ser el mayor y, por tanto, el elipsoide apunta en la dirección ortogonal a la de máxima variación de señal. Por otra parte, en las zonas homogéneas, al encontrar elipsoides redondeados, se comporta de forma equivalente al proceso isótropo no favoreciendo ninguna dirección en especial. Estas propiedades hacen que el inverso del tensor de estructura sirva de parámetro para controlar el proceso de regularización.

IV. APLICACIÓN PARA EL FILTRADO DE DT-MRI

El modelo que se propone en este artículo aplica la formulación variacional (4) a cada componente del campo tensorial utilizando $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$ para introducir el comportamiento anisótropo:

$$\xi = \int_{\Omega} ((f^{ij}(\mathbf{x}) - \hat{f}^{ij}(\mathbf{x}))^2 + \lambda \|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})\nabla \hat{f}^{ij}(\mathbf{x})\|^2) dx \quad (10)$$

Nótese que el tensor que controla la regularización del campo de datos es el mismo para todas las componentes $\{i, j\}$, asegurando de esta manera que todos los canales encuentran las discontinuidades en la misma posición y que se incluye la información de correlación entre componentes, lo que diferencia el modelo de un filtro multicanal.

La resolución de la formulación variacional (10) requiere una discretización para poder aplicarla sobre un conjunto de datos discretos, como es el caso de datos de DT-MRI. En este artículo se propone la utilización del método de elementos finitos para obtener la solución numérica del problema planteado.

A. Discretización Mediante el Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos requiere, en primer lugar, discretizar el espacio donde están definidos los datos $f(\mathbf{x})$ mediante una triangulación de Delaunay [1], aproximando la solución para cada componente $\{i, j\}$ de la siguiente forma:

$$\hat{f}^{ij}(\mathbf{x}) \cong \hat{f}_h^{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \hat{f}_l^{ij} \phi_l(\mathbf{x}), \quad (11)$$

donde el índice l recorre los N nodos de la triangulación, \hat{f}_l^{ij} representa un valor aproximado de la solución en el nodo l : $\hat{f}_l^{ij} = f^{ij}(\mathbf{x}_l)$; y la función $\phi_l(\mathbf{x})$ es una función centrada en el nodo l que cumple la siguiente condición:

$$\phi_l(\mathbf{x}_m) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = m \\ 0, & \text{si } l \neq m \end{cases} \quad (12)$$

y decrece linealmente desde el nodo l hasta hacerse cero en las aristas opuestas a dicho nodo. Del mismo modo, los datos de entrada se pueden discretizar por:

$$f^{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N f_l^{ij} \phi_l(\mathbf{x}) \quad (13)$$

Entonces, introduciendo (11) y (13) en la formulación variacional (10), llegamos a la siguiente expresión:

$$\xi = \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{l=1}^N (f_l^{ij} - \hat{f}_l^{ij}) \phi_l(\mathbf{x}) \right)^2 + \lambda \|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^N \hat{f}_l^{ij} \nabla \phi_l\|^2 \right) dx \quad (14)$$

Para minimizar el funcional de energía anterior, calculamos la derivada parcial respecto a un \hat{f}_m^{ij} y la igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{f}_m^{ij}} &= 2 \int_{\Omega} \phi_m(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^N (\hat{f}_l^{ij} - f_l^{ij}) \phi_l(\mathbf{x}) dx + \\ 2\lambda \int_{\Omega} \sum_{l=1}^N \hat{f}_l^{ij} < \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \phi_l, \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \phi_m > dx &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Esta última ecuación se puede plantear como un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, $\mathbf{A} \hat{\mathbf{f}}^{ij} = \mathbf{b}$, donde los elementos de la incógnita $\hat{\mathbf{f}}^{ij}$ serían los \hat{f}_l^{ij} , los del término independiente \mathbf{b} se calcularían según (16a) y los de la matriz \mathbf{A} verificarían (16b).

$$b_l = \sum_{m=1}^N f_l^{ij} \int_{\Omega} \phi_l(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) dx \quad (16a)$$

$$a_{lm} = \int_{\Omega} (\phi_l(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) + \lambda < \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \phi_l, \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \phi_m >) dx \quad (16b)$$

Una vez calculados los distintos elementos basta con invertir la matriz \mathbf{A} y multiplicarla por el vector \mathbf{b} para obtener la solución buscada.

V. RESULTADOS

Para mostrar el comportamiento del modelo anisótropo, hemos creado una imagen tensorial sintética en 2D con un borde ideal entre dos regiones: una con tensores alineados verticalmente y en la otra alineados horizontalmente. Se ha añadido ruido blanco gaussiano, obteniéndose la imagen presentada en la Fig. 1(a), que se ha regularizado utilizando

el método propuesto, con $\|\omega_0\| = \pi/8$ y $B = 2$ en (8) para estimar el tensor de estructura. La Fig. 1(b) muestra el resultado obtenido utilizando un valor de $\lambda = 1$.

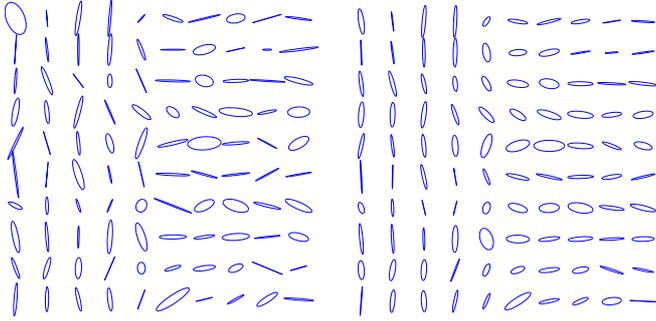


Fig. 1. (a) Imagen sintética con ruido. (b) Imagen filtrada con $\lambda = 1$

En otro de los experimentos realizados, partimos de un campo de datos DT-MRI 3D, correspondiente al cuerpo calloso. La Fig. 2(a) muestra la proyección en 2D del campo superpuesta a la imagen MRI T2. Los resultados obtenidos tras filtrar con el modelo propuesto se pueden ver en la Fig. 2(b).

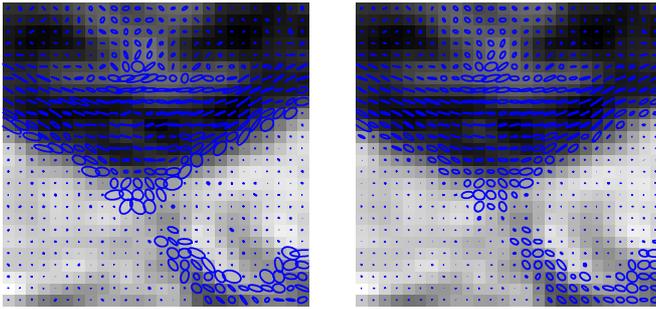


Fig. 2. (a) Imagen real con ruido. (b) Imagen filtrada con $\lambda = 1$

Para medir la calidad de los resultados obtenidos, utilizamos la siguiente medida de error cuadrático medio:

$$Error(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f^{ij}(\mathbf{x}) - \hat{f}^{ij}(\mathbf{x}))^2} \quad (17)$$

mediante un método de Monte Carlo con 100 iteraciones, se ha obtenido un error de 0,129.

Un requisito natural que hay que satisfacer al regularizar campos tensoriales es la preservación de la condición de tensores semidefinidos positivos. Se puede comprobar experimentalmente que en las pruebas realizadas esta condición se mantiene. Sin embargo, existen determinados casos donde ni los propios datos de entrada son tensores semidefinidos positivos, debido a la contribución del ruido introducido en el proceso de medida, que la rompe. En estos casos, como no se puede asegurar que el resultado sea semidefinido positivo, la solución pasa por proyectar el

resultado sobre dicho subespacio, igualando los autovalores negativos a cero [6].

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone la utilización de una formulación variacional anisótropa para regularizar datos tensoriales de cualquier orden (escalares, vectoriales o tensoriales de mayor orden), con especial interés en campos de DT-MRI, usando del inverso del tensor de estructura local para controlar el comportamiento anisótropo en el modelo, conservándose así los bordes y regiones de alta estructura.

Nuestro esquema se ha aplicado tanto a datos tensoriales sintéticos como reales observándose un buen comportamiento en lo que se refiere a la conservación de bordes y alineamiento de los tensores. Una posible aplicación de nuestro esquema es la mejora en la fiabilidad de los algoritmos de reconstrucción de las fibras nerviosas en la materia blanca del cerebro.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, mediante la concesión de una beca FPU (Ref: 2002-2774) y por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (TIC-2001-3808). Las imágenes de datos DT-MRI han sido proporcionadas por el *Brigham and Women's Hospital, Harvard Medical School, Boston (MA), USA*.

REFERENCES

- [1] Álvarez León L. Análisis Numérico. Las Palmas de Gran Canaria: Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. ISBN 8484161579. 1998.
- [2] Catté F., Coll T., Lions P.L., Morel J.M. Image Selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 29(1):182-193, February 1992.
- [3] Knutsson H. Representing local structure using tensors. In *6th Scandinavian Conference on Image Analysis*. Oulu, Finland, pages 244-251, 1989.
- [4] Knutsson H., Andersson M. What's So Good About Quadrature Filters?. *Proc. IEEE International Conference on Image Processing*. Invited Conference. Barcelona, Sept 2003.
- [5] Le Bihan D., Mangin J.F., Poupon C., Clark C.A., Pappata S. Molko N. and Chabriat H. Diffusion Tensor Imaging: Concepts and Applications. *Magnetic Resonance Imaging J.* 13:534-546, 2001.
- [6] Moon T.K., Stirling W.C. Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing. ISBN 0-201-36186-8. Prentice-Hall, 2000.
- [7] Perona P., Malik J. Scale-Space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intel.*, 12(7):629-639, July 1990.
- [8] Rodríguez Florido M.A. Procesado Anisótropo de Campos Tensoriales Multidimensionales y sus Aplicaciones al Filtrado y Segmentación de Imágenes Médicas. Tesis Doctoral. Centro de Tecnología Médica. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Julio 2003.
- [9] Rodríguez Florido M.A., Westin C.-F., Ruiz Alzola J. DT-MRI regularization using anisotropic tensor field filtering. *Proc. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*. In press, April 15-18. Arlington, VA (USA), 2004.
- [10] Sapiro G. Geometrical Partial Differential Equations and Image Analysis. Cambridge University Press, 2001.
- [11] Vemuri B., Chen Y., Rao M., McGraw T., Wang Z., Mareci T. Fiber tract mapping from diffusion tensor MRI. *Proc. IEEE Workshop on variational and level set methods in computer vision* Vancouver, Canada, 2001.
- [12] Weickert J. Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor. report 110, University of Kaiserslautern, Laboratory of Technomathematics, P.O. Box 3049, 67653 Kaiserslautern, Germany, 1994.
- [13] Westin C.-F., Maier S.E., Mamata H., Nabavi A., Jolesz F.A., Kikinis R. Processing and Visualization for Diffusion Tensor MRI. *Medical Image Analysis*, 6(2):93-108, June 2002.